TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

בס"ד, יום שישי י' אדר תשפ"ג

3.3.23

מבחן בחדו"א 1מ2 – 104042 – חורף תשפ"ג – 2023 – מועד ב'

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד.
- אסור להשתמש בחומר עזר
- בבוחן שלושה חלקים. חלק ראשון שמכיל שאלות פתוחות, חלק שני שאלות נכון/לא נכון וחלק שלישי של שאלות רב בררתיות ("אמריקאיות").
- בחלק של השאלות הפתוחות יש לנמק היטב כל צעד
- את כל התשובות יש לכתוב בגוף השאלון.

שאלה 1 (30 נק')

(שימו לב! שאלה זו, בנוסף להיותה חלק אינטגרלי מהבחינה, משמשת כתחליף לבוחן למי שזכאי לכך)

א. (12 נק') נסחו והוכיחו את משפט פרמה

ניסוח. תהא f מוגדרת בקטע I וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אזי $f'(x_0)=0$

הוכחה. נניח בה"כ כי x_0 נקודת מינימום, כלומר, קיימת סביבה J כך שלכל $x \in J$ מתקיים $f(x)-f(x_0) \geq 0$.

נסתכל על מנת ההפרשים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ נבחין בין שני מקרים

א. $x > x_0$

ואז $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ ומתכונת סדר של גבולות נקבל כי $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ כלומר $f'_+(x_0) \geq 0$

ב. $x < x_0$

ואז $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ ומתכונת סדר של גבולות נקבל כי $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ כלומר $f'_-(x_0) \leq 0$

כיוון ש-f גזירה בנקודה x_0 נקבל

$$0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$$

כלומר כי $f'(x_0)=0$

ב.(12 נק') מצאו מינימום ומקסימום גלובליים של הפונקציה $(x^2-1)|x-1|$ בקטע $[-2,2]$

(תתקבל רק הוכחה פורמלית - לא ציורים)

פתרון. נכתוב

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-1)(x-1)=x^3-x^2-x+1 & 1 \leq x \leq 2\\ -(x^2-1)(x-1)=-x^3+x^2+x-1 & -2 \leq x < 1\end{cases}$$

הפונקציה רציפה – אלמנטרית ומוגדרת בתחום. לכן ע"פ ויירשטראס יש לה מינימום ומקסימום גלובלי בתחום.

המינימום והמקסימום יכולים להתקבל באחד משלושת המקומות הבאים:

א. כשהנגזרת מתאפסת

ב. היכן שהפונקציה (אולי) אינה גזירה

ג. בקצוות

נבדוק מתי הנגזרת מתאפסת

עבור $1 < x < 2$ נבדוק מתי

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

פותרים משוואה ריבועית ומקבלים שני שורשים $1, -\frac{1}{3}$ אבל אף אחד לא בתחום.

עבור $-2 < x < 1$ נבדוק מתי

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = 0$$

פותרים משוואה ריבועית ומקבלים שני שורשים $1, -\frac{1}{3}$ כלומר $-\frac{1}{3}$ נקודה חשודה.

נציב במשוואה את הנקודה בתוספת הנקודות משאר הסעיפים ונקבל

x	-2	$-\frac{1}{3}$	1	2
$f(x)$	9	$-\frac{32}{27}$	0	3

ולכן המקסימום בנקודה $(-2,9)$ והמינימום בנקודה $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

ג. (6 נק') מצאו מינימום ומקסימום גלובליים של הפונקציה $|(x^2-1)(x-1)|$ בקטע $[-2,2]$

(תתקבל רק הוכחה פורמלית - לא ציורים)

נסתכל על $f(x) = (x^2-1)(x-1) = x^3 - x^2 - x + 1$

כמקודם:

הפונקציה רציפה – אלמנטרית ומוגדרת בתחום. לכן ע"פ ויירשטראס יש לה מינימום ומקסימום גלובלי בתחום.

המינימום והמקסימום יכולים להתקבל באחד משלושת המקומות הבאים:

ד. כשהנגזרת מתאפסת
ה. היכן שהפונקציה (אולי) אינה גזירה
ו. בקצוות

וכמקודם נבדוק מתי הנגזרת מתאפסת כלומר נבדוק מתי

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

פותרים משוואה ריבועית ומקבלים שני שורשים $1, -\frac{1}{3}$

כעת נבנה את הטבלה הבאה

x	-2	$-\frac{1}{3}$	1	2
$f(x)$	-9	$-\frac{32}{27}$	0	3

כמו כן נשים לב שהפונקציה מתאפסת גם בנקודה $(-1,0)$

ולכן המקסימום בנקודה $(-2,9)$ והמינימום בנקודות $(1,0)$ ו-$(-1,0)$

<u>שאלה 2 (20 נק')</u>

א. (10 נק') הראו כי $\frac{1}{5} < \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{sinx}{x} dx < \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{3\pi} = \frac{1}{3\pi}\int_{2\pi}^{3\pi} sinxdx \le \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{sinx}{x} dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{3\pi} sinxdx = \frac{2}{2\pi} < \frac{1}{3}$$

ב. (10 נק') חשבו $\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{tanx} sintdt}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{tanx} sintdt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(tanx)}{2xcos^2x} - \frac{\sin(x^2)\,2x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(tanx)\sin(tanx)}{2xcos^2x(tanx)} - \frac{\sin(x^2)\,2x}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$

חלק שני רב ברירתי – "אמריקאי" (35 נקודות)

שאלה 1 (7 נק')

הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+sin(n)}{n}\right)^{\frac{n}{sin(n)}}$ שווה ל-

א. 0 ב. 1 **ג**. e ד. ∞ ה. הגבול לא קיים

שאלה 2 (7 נק')

נתונים שני הטורים הבאים $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n}$ $II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)}{arctan\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ אזי

א. שניהם מתכנסים

ב. שניהם מתבדרים

ג. I מתכנס II מתבדר

ד. II מתכנס I מתבדר

שאלה 3 (7 נק')

א. תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(1/n)arcsin(1/n)}{2^n}x^n$

א. $-1\le x\le 1$ ב. $-2\le x<2$ **ג**. $-2\le x\le 2$ ד. $-1<x\le 1$ ה. $-1<x<1$

שאלה 4 (7 נק')

$$\int_1^{\sqrt{\pi+1}} 2xcos\,(1-x^2)dx$$

א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3 ה. 4

שאלה 5 (7 נק')

$$\int_0^1 \frac{1}{x-sinx}\,dx$$

א. מתכנס בהחלט

ב. מתכנס בתנאי למספר קטן מאחד

ג. מתכנס בתנאי למספר גדול מאחד

ד. לא מתכנס

סמנו נכון/לא נכון בסעיפים הבאים (15 נק' - 3 נק' לכל סעיף)

1. $cosx \geq 2x$ בקטע $[0,1]$

א. נכון **ב. לא נכון**

2. לכל $0 < x < 1$ מתקיים $ln(1-x) \leq x$

א. נכון **ב. לא נכון**

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

א. נכון **ב. לא נכון**

4. תהא a נקודת פיתול של f אזי הפונקציה גזירה בנקודה a

א. נכון **ב. לא נכון**

5. אם פונקציה f רציפה וחיובית בנק' a אזי קיימת סביבה של הנקודה a שבה f חיובית

א. נכון **ב. לא נכון**

דף ריק במידת הצורך

בהצלחה!